

Bài 5. Phương trình Di-ô-phăng $ax + by = c$

A. Tóm tắt lý thuyết

5.1. Điều kiện có nghiệm.

Phương trình $ax + by = c$ (*) có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $U'CLN(a, b) \mid c$.

5.2. Tập hợp nghiệm.

Nếu phương trình (*) có nghiệm nguyên (x_0, y_0) thì tập hợp tất cả các nghiệm (x, y) của nó

được xác định bởi
$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases}, \text{ trong đó } d = (a, b), t \in \mathbb{Z}.$$

5.3. Thực hành giải phương trình (*).

Giả sử $|a| < |b|$. Khi đó chia b cho a ta được $b = aq + r$, $|r| < |a|$. Khi đó $x = \frac{c-by}{a} = \frac{c-ry}{a} - qy$. Đặt $\frac{c-ry}{a} = t$ ta có $ry = c - at$. Suy ra $y = \frac{c-at}{r}$. Tới đây ta lại tiếp tục chia a cho r như trên. Quá trình này sau hữu hạn bước và ta có được công thức nghiệm tổng quát của (*).

B. Một số dạng bài toán thường gặp

Dạng 1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình Di-ô-phăng $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Phương pháp:

- Sử dụng phương pháp tách phần nguyên

Ví dụ 1. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình: $32x - 48y = 112$

Giải

Ta có:

$$32x - 48y = 112 \Leftrightarrow 2x - 3y = 7;$$

$$x = \frac{7+3y}{2} = 3 + y + \frac{1+y}{2}.$$

Đặt $1+y = 2t$, $t \in \mathbb{Z}$ ta có $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là:

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận theo số nguyên m phương trình sau với $x, y \in \mathbb{Z}$: $15x - 25y = 2m - 1$.

Giải

Do $d = U'CLN(15; 25) = 5$ nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$2m - 1 = 5k, k \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó $m = \frac{5k+1}{2} = 2k + \frac{k+1}{2}$.

Đặt $k+1 = 2u$, $u \in \mathbb{Z}$, ta được $m = 5u - 2$.

Phương trình đã cho có dạng:

$$15x - 25y = 10u - 5$$

hay

$$3x - 5y = 2u - 1. \quad x = \frac{2u-1+5y}{3} = u + 2y - \frac{1+u+y}{3}.$$

Đặt $1+u+y = 3t$, $t \in \mathbb{Z}$, ta được

$$\begin{cases} x = 5t - u - 2 \\ y = 3t - u - 1 \end{cases}.$$

Kết luận:

- Nếu $m = 5u - 2$, $u \in \mathbb{Z}$ thì phương trình đã cho có nghiệm:

$$\begin{cases} x = 5t - u - 2 \\ y = 3t - u - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu $m \neq 5u - 2$, $u \in \mathbb{Z}$ thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Dạng 2. Tìm các số trong hệ thập phân thoả mãn điều kiện chia hết

Phương pháp:

- Đưa về phương trình Di-ô-phăng

Ví dụ 1. Hãy tìm tất cả các số trong hệ thập phân có dạng $\overline{x48}$ chia hết cho 38.

Giải

Số $\overline{x48}$ chia hết cho 38 có nghĩa là

$$100x + 48 = 38t, t \in \mathbb{Z}$$

hay

$$50x + 24 = 19t \Rightarrow t = \frac{50x + 24}{19} = 3x + 1 + \frac{5 - 7x}{19}.$$

$$\text{Đặt } 5 - 7x = 19u, u \in \mathbb{Z}, \text{ ta có } x = \frac{5 - 19u}{7} = 1 - 3u + \frac{2(u - 1)}{7}.$$

Đặt $u - 1 = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có $u = 7k + 1$ và do đó $x = -19k - 2$.

Do $1 \leq x \leq 9$ nên không tồn tại k . Vậy bài toán vô nghiệm.

Ví dụ 2. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho n chia hết cho 9, $n + 1$ chia hết cho 25 và $n + 2$ chia hết cho 4.

Giải

Gọi số phải tìm là $n = 9x$, $x \in \mathbb{Z}$, ta có hệ

$$\begin{cases} 9x + 1 = 25y \\ 9x + 2 = 4z \end{cases}, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$4z - 25y = 1 \Rightarrow z = \frac{25y + 1}{4} = 6y + \frac{y + 1}{4}.$$

Đặt $y + 1 = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có $y = 4k - 1$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra

$$9x + 1 = 100k - 25 \Rightarrow x = \frac{100k - 26}{9} = 11k - 3 + \frac{k + 1}{9}.$$

Đặt $k + 1 = 9s$, $s \in \mathbb{Z}$, ta có $k = 9s - 1$ và do đó $n = 9x = 100k - 26 = 900s - 126$.

n là số tự nhiên nhỏ nhất khi $s = 1$, $n = 774$.